UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
DAN STRÄNGBERG

HT2016
FRISTÅENDE, IT, KANDDV, KANDMA, LÄRARE
2016-11-02

Algebra I, 1MA004

Lektionsplanering

Här anges rekommenderade uppgifter ur boken till varje lektion, inlämningsuppgifter och diskussionsämnen. Försök att lösa så många rekommenderade uppgifter som möjligt innan varje lektion. Om det var något du hade problem med kan du diskutera med dina kurskamrater eller fråga läraren på lektionen. Lägg inte ner för mycket tid på uppgifter som du tycker är enkla utan fokusera på uppgifter du har svårt för. **Inlämningsuppgifterna som anges under varje lektion ska lämnas in senast nästa lektion. Kom ihåg att skriva erat namn.**

Lektion 1

Avsnitt	Uppgifter
1.3	1.12
1.4	1.13
1.5	1.14-1.18
1.6	1.20, 1.21, 1.23-1.25, 1.31, 1.32, 1.34
1.7	1.35, 1.37
1.8	1.39-1.42, 1.46-1.48
1.9	1.58, 1.60-1.63, 1.65, 1.67, 1.68

OBS: Fel i facit på uppgifter 1.16a(3) och 1.37d.

Inlämningsuppgifter

1. Låt A och B vara två utsagor. Visa följande ekvivalenser[1]:

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$
$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

2. Låt $P(x)$ och $Q(x)$ vara två utsagor som beror på en variabel x i ett universum X. Låt $A = \{x \in X\colon P(x)\}$ och $B = \{x \in X\colon Q(x)\}$. Beskriv mängden

$$C = \{x \in X\colon \neg(P(x) \vee Q(x)) \vee (P(x) \wedge \neg Q(x))\}$$

med mängderna A, B och operationerna union, snitt, mängddifferens och komplement.

[1] Dessa ekvivalenser kallas de Morgans lagar.

Lektion 2

Avsnitt	Uppgifter
2.1	2.1-2.9, 2.11-2.14, 2.16
2.2	2.17, 2.20-2.23
2.3	2.25-2.27, 2.28ac, 2.29, 2.30, 2.33-2.35, 2.37, 2.38
2.4	2.42-2.44, 2.46, 2.47, 2.49-2.51, 2.53-2.58

Diskussionsämnen

På föreläsningarna har nämnts att mängdläran så som vi har gått igenom den, så kallad *naiv mängdlära*, har en del problem. I denna diskussion ska vi utforska några av dessa problem och hur man kan gå till väga för att lösa problemen. Vi har även börjat prata om tal och ska därför utforska hur dessa kan konstrueras med hjälp av mängdlära.

1. Ett av de mest kända problemen med naiv mängdlära är Russels paradox. Genom att utnyttja det faktum att varje samling av objekt som uppfyller en viss utsaga är en mängd kan vi skapa mängden R som består av *alla mängder som inte innehåller sig själv*. Varför leder detta till motsägelser? Kan du komma på andra motsägelser i naiv mängdlära?

2. Ett sätt att lösa problemen med naiv mängdlära är att *axiomatisera* mängdläran. Den mest kända axiomatiseringen av mängdlära är den så kallade *ZF-mängdläran*, efter dess skapare Ernst Zermelo och Abraham Fraenkel. Denna innehåller *delmängdsaxiomet* som säger att givet en mängd A och en utsaga $P(x)$ kan man skapa delmängden bestående av alla element x i A som uppfyller utsagan $P(x)$. Hur löser detta Russels paradox? Kan du komma på några andra intressanta följder av detta axiom?

3. Hur kan du använda mängdlära för att konstruera något som beter sig som de naturliga talen? Hur definierar du addition och multiplikation med din konstruktion? Kan du ta din konstruktion ännu längre och få något som beter sig som heltalen? De rationella talen?

Lektion 3

Avsnitt	Uppgifter
2.4	2.42-2.44, 2.46, 2.47, 2.49-2.51, 2.53-2.58
2.5	2.60-2.63, 2.64a, 2.66 (använd 2.64a)
2.6	2.68, 2.69, 2.71, 2.73, 2.76, 2.77, 2.79
2.7	2.80-2.83, 2.89-2.91, 2.93, 2.96

Inlämningsuppgifter

1. Lös den Diofantiska ekvationen $55x - 17y = 2$ fullständigt.

2. Visa att varje primtal $p > 3$ kan skrivas på formen $p = 6n + 1$ eller $p = 6n - 1$ för något positivt heltal n.

   Tips: Vilka rester är möjliga när p delas med 6?

Lektion 4

Avsnitt	Uppgifter
2.5	2.60-2.63, 2.64a, 2.66 (använd 2.64a)
4.1	4.1-4.8, 4.11, 4.13, 4.14
4.2	4.15-4.20, 4.24, 4.25, 4.27-4.29
4.3	4.37-4.42, 4.44

OBS: Uppgift 4.15 innehåller ett tryckfel. P_n ska vara $1+2+4+8+\cdots+2^n = 2^{n+1}-1$.

Diskussionsämnen

De senaste föreläsningarna har vi gått igenom ett antal bevismetoder. Vi ska i denna diskussion utforska motsägelsebevis och induktionsbevis.

1. Lagen om det uteslutna tredje säger att antingen är en utsaga sann eller så är dess motsats sann. Det finns inget tredje alternativ. Detta är en nödvändig ingrediens i motsägelsebevis. Om vi till exempel vill visa att något existerar börjar vi med att anta motsatsen, att det inte existerar. Om detta leder till en motsägelse så måste det vara falskt att det inte existerar så enligt lagen om det uteslutna tredje måste det därför vara sant att det existerar. Även om vi inte har ett endaste exempel. Tycker du att ett sådant typ av bevis är korrekt eller tycker du att vi faktiskt måste konstruera eller hitta ett exempel? Tycker du att storleken på mängden vi arbetar med gör skillnad, t.ex. att motsägelsebevis är korrekta när man behandlar ändliga mängder men inte oändliga?

2. I kursen har vi studerat induktionsbevis över naturliga tal men det finns varianter av induktionsbevis som gäller för andra mängder. Kan du komma på andra mängder eller typer av mängder där induktion fungerar? Vilken struktur måste en mängd ha för att induktion över den ska vara möjlig?

3. Strukturell induktion är en typ av induktion som används inom bland annat datavetenskap. Det används när det inte finns något naturligt nästa objekt, så som för de naturliga talen, utan objekten istället förgrenar sig. Till exempel kan vi tänka oss *ord*, kedjor av bokstäver, där vi läger till bokstäver. Till ordet (abc) finns ingen naturlig efterföljare, vi skulle t.ex. kunna ha $(abcd)$ eller $(abce)$. När man genomför en sådan induktion börjar man som vanligt med att visa nödvändiga basfall. Som induktionssteg visar man sedan att om y kan nås från x, t.ex. om $y = (abcd)$ och $x = (abc)$, och utsagan gäller för x då måste utsagan också gälla för y. Kan du använda strukturell induktion för att visa att om A och B är två ord och C är deras sammanslagning, $C = A + B$, så gäller $\text{längd}(C) = \text{längd}(A) + \text{längd}(B)$? Kan du komma på andra situationer där strukturell induktion kan vara användbart?

Lektion 5

Avsnitt	Uppgifter
4.1	4.1-4.8, 4.11, 4.13, 4.14
4.2	4.15-4.20, 4.24, 4.25, 4.27-4.29
4.3	4.37-4.42, 4.44
3.1	3.2, 3.4, 3.6, 3.8

Inlämningsuppgifter

1. En talföljd definieras rekursivt av $a_0 = 0$ och $a_n = a_{n-1} + n$. Finn en sluten formel för a_n och bevisa, till exempel med induktion, att den stämmer.

2. Visa med induktion att produkten av tre på varandra följande naturliga tal alltid är delbar med 3.

Lektion 6

Avsnitt	Uppgifter
3.1	3.2, 3.4, 3.6, 3.8
3.3	3.9, 3.11-3.14
3.4	3.15, 3.16, 3.18-3.22, 3.24, 3.25, 3.29

Diskussionsämnen

Vi har nu pratat lite om mängders storlek och lärt oss att vi kan jämföra mängders storlek m.h.a. konceptet kardinalitet för att säga t.ex. om två mängder har samma kardinalitet eller om den ena har större kardinalitet än den andra. I denna diskussion ska vi utforska detta koncept djupare.

1. Ett sätt att utveckla konceptet kardinalitet är att införa så kallade *kardinaltal* som mäter mängders storlek mer exakt. Detta kan göras även för oändliga mängder vilket ger oss de oändliga kardinaltalen. Vi kan även utföra de vanliga operationerna på kardinaltal. Till exempel kan vi addera kardinaltal med varandra. Kan du komma på ett sätt att till varje ändlig mängd associera ett ”tal” som beskriver mängdens storlek? Hur skulle du göra för oändliga mängder? Hur skulle du införa operationer som addition på dina kardinaltal och hur skulle det funka för oändliga kardinaltal? Kan det uppstå problem, så som paradoxer, p.g.a. vår naiva mängdlära?

2. Det är känt att $\mathbb{N} <_c \mathbb{R}$. Finns det någon mängd A med kardinalitet som uppfyller $\mathbb{N} <_c A <_c \mathbb{R}$?

Lektion 7

Avsnitt	Uppgifter
7.1	7.1-7.6
7.2	7.7-7.14, 7.17-7.23, 7.27-7.29
7.3	7.30-7.33, 7.35, 7.36, 7.38, 7.40
7.4	7.42-7.44, 7.46-7.50, 7.52-7.54
7.5	7.57-7.59, 7.63-7.67, 7.72-7.75, 7.81, 7.87

Se extramaterialet för uppgifter om kardinalitet.

Inlämningsuppgifter

1. Konstruera en bijektion mellan $(0,1)$ och $(0,\infty)$. Ange sedan en bijektion mellan $(-1,0)$ och $(-\infty,0)$.

   Tips: Hitta först en bijektion mellan $(0,1)$ och $(1,\infty)$.

2. Ange en bijektion mellan $(-1,1)$ och $(0,1)$. Använd detta och ovan konstruerade bijektioner för att visa att $(0,1) =_c \mathbb{R}$.

Lektion 8

Avsnitt	Uppgifter
7.3	7.30-7.33, 7.35, 7.36, 7.38, 7.40
7.4	7.42-7.44, 7.46-7.50, 7.52-7.54
7.5	7.57-7.59, 7.63-7.67, 7.72-7.75, 7.81, 7.87

Diskussionsämnen

Nu har vi lärt oss om hur division fungerar för både heltal och för polynom. Vi har också sett att det finns många likheter men vissa skillnader mellan dem. I den här diskussionen ska vi fördjupa oss i detta samband och förhoppningsvis se några nya. Vi skriver mängden av komplexa polynom i en variabel x som $\mathbb{C}[x]$.

1. Vad finns det för likheter mellan $\mathbb{Z}$ och $\mathbb{C}[x]$ med deras respektive additions- och multiplikationsoperationer? Vad finns det för skillnader?

2. Vi har även undersökt hur kongruensräkning fungerar. Man brukar skriva restklasserna modulo ett naturligt tal n med motsvarande addition och multiplikation som $\mathbb{Z}_n$. Vad finns det för likheter och skillnader mellan $\mathbb{Z}_n$ och $\mathbb{Z}$ eller $\mathbb{C}[x]$ och hur beror dessa på n?

3. Hur skulle du formulera definitionen av ett objekt som har liknande egenskaper? Uppfyller $\mathbb{Z}, \mathbb{C}[x]$ eller $\mathbb{Z}_n$ din definition? Gå igenom egenskaperna vi pratat om under kursens gång. Hur fungerar delbarhet? Finns det någon motsvarighet till primtal? Största gemensamma delare? Euklides algoritm? Om inte, vilket eller vilka krav måste uppfyllas utöver din definition för att det ska finnas?

Lektion 9

Förberedelser inför tentamen.