UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN
DAN LILJA

HT2017
FRISTÅENDE, IT, KANDDV, KANDMA, LÄRARE
2017-11-14

Algebra I, 1MA004

Lektionsplanering

Här anges rekommenderade uppgifter ur boken till varje lektion, inlämningsuppgifter och diskussionsämnen. Försök att lösa så många rekommenderade uppgifter som möjligt innan varje lektion. Om det var något ni hade problem med kan ni diskutera med dina kurskamrater eller fråga läraren på lektionen. Lägg inte ner för mycket tid på uppgifter som ni tycker är enkla utan fokusera på uppgifter ni har svårt för. **Inlämningsuppgifterna som anges under varje lektion ska lämnas in senast nästa lektion. Kom ihåg att skriva erat namn. Kom ihåg att ni inte behöver diskutera alla diskussionsuppgifter. Välj någon eller några som verkar intressant. Om diskussionsuppgiften är svår att förstå, börja med att diskutera problemformuleringen tills ni förstår uppgiften innan ni börjar diskutera en lösning.**

Lektion 1

Avsnitt	Uppgifter
1.3	1.12
1.4	1.13
1.5	1.14-1.18
1.6	1.20, 1.21, 1.23-1.25, 1.31, 1.32, 1.34
1.7	1.35, 1.37
1.8	1.39-1.42, 1.46-1.48
1.9	1.58, 1.60-1.63, 1.65, 1.67, 1.68

OBS: Fel i facit på uppgifter 1.16a(3) och 1.37d.

Inlämningsuppgifter

1. Låt A och B vara två utsagor. Visa följande ekvivalenser[1]:

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$
$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

2. Låt $P(x)$ och $Q(x)$ vara två utsagor som beror på en variabel x i ett universum X. Låt $A = \{x \in X \colon P(x)\}$ och $B = \{x \in X \colon Q(x)\}$. Beskriv mängden

$$C = \{x \in X \colon \neg(P(x) \vee Q(x)) \vee (P(x) \wedge \neg Q(x))\}$$

[1] Dessa ekvivalenser kallas de Morgans lagar.

med mängderna A, B och operationerna union, snitt, mängddifferens och komplement.

Lektion 2

Avsnitt	Uppgifter
2.1	2.1-2.9, 2.11-2.14, 2.16
2.2	2.17, 2.20-2.23
2.3	2.25-2.27, 2.28ac, 2.29, 2.30, 2.33-2.35, 2.37, 2.38
2.4	2.42-2.44, 2.46, 2.47, 2.49-2.51, 2.53-2.58

Diskussionsämnen

På föreläsningarna har nämnts att mängdläran så som vi har gått igenom den, så kallad *naiv mängdlära*, har en del problem. I denna diskussion ska vi utforska några av dessa problem och hur man kan gå till väga för att lösa problemen. Vi har även börjat prata om tal och ska därför utforska hur dessa kan konstrueras med hjälp av mängdlära.

1. Givet två mängder A och B är vi ibland intresserade av att studera ordnade par[2] (a, b) av element $a \in A$ och $b \in B$. Att paren är ordnade betyder att $(a, b) \neq (b, a)$ om inte $a = b$. Ett vanligt sätt att göra detta med ren mängdlära är med så kallade *Kuratowskipar*, döpt efter den polska matematikern Kazimierz Kuratowski, som definieras enligt $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Kan ni bevisa att $(a, b) = (x, y) \Leftrightarrow (a = x) \wedge (b = y)$ för Kuratowskipar? Kan ni komma på andra definitioner av ordnade par som också uppfyller kravet $(a, b) = (x, y) \Leftrightarrow (a = x) \wedge (b = y)$?

2. Givet en mängd A kan vi skapa en ny mängd $\{A\}$ vars enda element är hela mängden A. Genom att använda denna egenskap och att unionen av två mängder också är en mängd kan vi skapa mängder som motsvarar de naturliga talen genom att utgå från den tomma mängden $\varnothing$. Försök att hitta en sådan konstruktion. Om ni lyckas, försök sedan att definiera addition och andra operationer på dessa naturliga tal.

   Tips: Börja med att definiera 0 som $\varnothing$. Hur definierar ni sedan talet 1 utifrån 0?

3. Ett av de mest kända problemen med naiv mängdlära är Russels paradox. Genom att utnyttja det faktum att varje samling av objekt som uppfyller en viss utsaga är en mängd kan vi skapa mängden R som består av *alla mängder som inte innehåller sig själv*. Varför leder detta till motsägelser? Kan ni komma på andra motsägelser i naiv mängdlära? Kan ni komma på andra situationer där en variant på Russels paradox kan dyka upp?

4. Ett sätt att lösa problemen med naiv mängdlära är att *axiomatisera* mängdläran. Den mest kända axiomatiseringen av mängdlära är den så kallade *ZF-mängdläran*, efter dess skapare Ernst Zermelo och Abraham Fraenkel. Denna innehåller *delmängdsaxiomet*

[2] Kom ihåg att en mängd är oordnad, d.v.s. $\{a, b\} = \{b, a\}$.

som säger att givet en mängd A och en utsaga $P(x)$ kan man skapa delmängden bestående av alla element x i A som uppfyller utsagan $P(x)$. Hur löser detta Russels paradox? Kan ni komma på några andra intressanta följder av detta axiom?

Lektion 3

Avsnitt	Uppgifter
2.4	2.42-2.44, 2.46, 2.47, 2.49-2.51, 2.53-2.58
2.5	2.60-2.63, 2.64a, 2.66 (använd 2.64a)
2.6	2.68, 2.69, 2.71, 2.73, 2.76, 2.77, 2.79
2.7	2.80-2.83, 2.89-2.91, 2.93, 2.96

Inlämningsuppgifter

1. Visa att den Diofantiska ekvationen $68x - 29y = 3$ är lösbar och lös sedan ekvationen fullständigt.

2. Visa att varje primtal $p > 3$ kan skrivas på formen $p = 6n + 1$ eller $p = 6n - 1$ för något positivt heltal n.

   Tips: Vilka rester är möjliga när p delas med 6?

Lektion 4

Avsnitt	Uppgifter
2.5	2.60-2.63, 2.64a, 2.66 (använd 2.64a)
4.1	4.1-4.8, 4.11, 4.13, 4.14
4.2	4.15-4.20, 4.24, 4.25, 4.27-4.29
4.3	4.37-4.42, 4.44

OBS: Uppgift 4.15 innehåller ett tryckfel. P_n ska vara $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

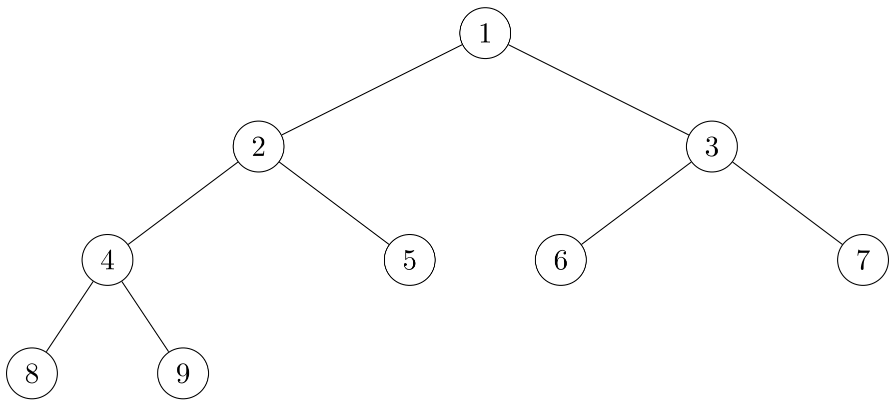
Diskussionsämnen

De senaste föreläsningarna har vi gått igenom ett antal bevismetoder. Vi ska i denna diskussion utforska motsägelsebevis och induktionsbevis.

1. Lagen om det uteslutna tredje säger att antingen är en utsaga sann eller så är dess motsats sann. Det finns inget tredje alternativ. Detta är en nödvändig ingrediens i motsägelsebevis. Om vi till exempel vill visa att något existerar börjar vi med att anta motsatsen, att det inte existerar. Om detta leder till en motsägelse så måste det vara falskt att det inte existerar så enligt lagen om det uteslutna tredje måste det därför vara sant att det existerar. Även om vi inte har ett endaste exempel. Tycker ni att ett sådant typ av bevis är korrekt eller tycker ni att vi faktiskt måste konstruera eller hitta ett konkret exempel? Tycker ni att storleken på mängden vi arbetar med gör skillnad, t.ex. att motsägelsebevis är korrekta när man behandlar ändliga mängder men inte oändliga?

2. I kursen har vi studerat induktionsbevis över naturliga tal men det finns varianter av induktionsbevis som gäller för andra mängder. Kan ni komma på andra mängder eller typer av mängder där induktion fungerar? Vilken struktur måste en mängd ha för att induktion på den ska vara möjlig?

3. Strukturell induktion är en typ av induktion som används inom bland annat datavetenskap. Det används när det inte finns något naturligt nästa objekt, så som för de naturliga talen, utan objekten istället förgrenar sig ut från något minsta objekt. Vi börjar då med att bevisa utsagan för det minsta objektet som vårat basfall. Som induktionsantagande antar vi att utsagan stämmer för alla objekt av en viss storlek p. Slutligen visar vi att då måste utsagan också stämma för alla objekt av storlek $p+1$. Till exempel kan vi tänka oss *binära träd*. Grafer består av *noder* och *kanter* mellan noderna. Ett binärt träd har en speciell nod som kallas *roten*. Roten kan sedan ha kanter neråt till nya noder. Dessa två noder kan sedan peka neråt till ytterliggare nya noder. Det som gör att trädet kallas binärt är att varje nod, inklusive roten, kan peka till maximalt två nya noder. En nod som pekar vidare neråt kallas för en *inre nod* och en nod som inte pekar vidare neråt kallas för ett *löv*. Ett binärt träd kallas *fullt* om varje inre nod pekar på två nya noder. Ett exempel på ett binärt träd ser ni nedan:



Figur 1: Ett fullt binärt träd.

I det här exemplet är roten 1, de inre noderna är 1, 2, 3, och 4, och löven är 8, 9, 5, 6, 7. Om vi låter N beteckna antalet inre noder i ett fullt binärt träd och L beteckna antalet löv i ett fullt binärt träd, kan ni då bevisa att $N + 1 = L$ för alla fulla binära träd med hjälp av strukturell induktion?

Lektion 5

Avsnitt	Uppgifter
4.1	4.1-4.8, 4.11, 4.13, 4.14
4.2	4.15-4.20, 4.24, 4.25, 4.27-4.29
4.3	4.37-4.42, 4.44
3.1	3.2, 3.4, 3.6, 3.8

Inlämningsuppgifter

1. Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara reella tal som uppfyller $-1 < x_k < 0$ för $1 \leq k \leq n$. Visa med induktion att
$$\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k$$
för alla positiva helal n.

2. Visa att produkten av tre på varandra följande heltal alltid är delbart med 6.

Lektion 6

Avsnitt	Uppgifter
3.1	3.2, 3.4, 3.6, 3.8
3.3	3.9, 3.11-3.14
3.4	3.15, 3.16, 3.18-3.22, 3.24, 3.25, 3.29

Diskussionsämnen

Vi har nu pratat om vad funktioner och relationer är. Speciellt har vi pratat om ekvivalensrelationer. I denna diskussion ska vi titta närmare på några viktiga aspekter av dessa koncept.

1. Hur många olika sätt kan ni komma på som definierar en funktion? Kom ihåg att sättet måste uppfylla den formella definitionen av en funktion (definition 5.1 i kompendiet).

2. Koncepten injektiv, surjektiv, och bijektiv för funktioner är nära kopplat till lösbarhet av ekvationer. Hur?

3. Givet en mängd A kan vi tolka sammansättning av funktioner som en operation på mängden av funktioner $f\colon A \to A$. Vilka egenskaper uppfyller denna operation (så som kommutativitet, associativitet, enhetselement, o.s.v.)?

4. Givet en mängd A med en eller flera operationer är det vanligt att definiera en ekvivalensrelation och visa att relationen respekterar operationerna, som vi gjorde med kongruenser, eller att helt enkelt definiera operationerna på ekvivalensklasserna för relationen. Kan ni komma på någon anledning till att göra detta?

Lektion 7

Se extramaterialet för uppgifter om kardinalitet.

Inlämningsuppgifter

1. Konstruera en bijektion mellan $(0,1)$ och $(0,\infty)$. Ange sedan en bijektion mellan $(-1,0)$ och $(-\infty,0)$.

   Tips: Hitta först en bijektion mellan $(0,1)$ och $(1,\infty)$.

2. Ange en bijektion mellan $(-1,1)$ och $(0,1)$. Använd detta och ovan konstruerade bijektioner för att visa att $(0,1) =_c \mathbb{R}$.

Lektion 8

Avsnitt	Uppgifter
7.1	7.1-7.6
7.2	7.7-7.14, 7.17-7.23, 7.27-7.29
7.3	7.30-7.33, 7.35, 7.36, 7.38, 7.40
7.4	7.42-7.44, 7.46-7.50, 7.52-7.54
7.5	7.57-7.59, 7.63-7.67, 7.72-7.75, 7.81, 7.87

Inlämningsuppgifter

1. Polynomet $x^4+2x^3+2x^2-6x-15$ har ett nollställe $x = -1+2i$. Hitta alla nollställen.

2. Faktorisera polynomet $x^4 - x^3 - 9x^2 + 11x + 6$.

Lektion 9

Avsnitt	Uppgifter
7.1	7.1-7.6
7.2	7.7-7.14, 7.17-7.23, 7.27-7.29
7.3	7.30-7.33, 7.35, 7.36, 7.38, 7.40
7.4	7.42-7.44, 7.46-7.50, 7.52-7.54
7.5	7.57-7.59, 7.63-7.67, 7.72-7.75, 7.81, 7.87

Diskussionsämnen

I den sista diskussionen ska vi sammanfatta de stora delarna av kursen genom att jämföra de olika objekten vi har studerat och fundera lite på hur man kan gå vidare. Detta ger oss en liten inblick i världen av *abstrakt algebra* som studeras i fortsättnignskurserna i algebra.

1. Undersök hur addition fungerar på mängderna $\mathbb{Z}$ och $\mathbb{Q}$. Titta på till exempel associativitet, kommutativitet, existens av inverser. Finns det likheter? Finns det skillnader? Hur är det med multiplikation? Hur fungerar samspelet mellan addition och multiplikation?

2. Undersök hur addition och multiplikation fungerar för $\mathbb{Z}_n$, mängden av kongruensklasser modulo n. Börja med att titta på specifika n, till exempel $n = 2, 3, 4$. Finns det några skillnader i vilka egenskaper som uppfylls för olika n?

3. Undersök hur addition och multiplikation fungerar för komplexa polynom, $\mathbb{C}[x]$.

4. Vilka egenskaper är gemensamma i alla olika fall ovan? Vilka egenskaper är specifika till vissa exempel? Kan ni definiera ett matematiskt objekt bestående av en mängd R och två operationer $+_R$ och $\cdot_R$ som båda tar två element i R och ger ett element i R på ett sådant sätt att alla exempel ovan är exempel av denna mer generella konstruktion? Kan ni skapa en definition som särskiljer några exempel, d.v.s. som vissa exempel uppfyller men inte andra?

Tips: Om ni fastnar på någon uppgift, läs lite om koncepten *ring* (*ring* på engelska) och *kropp* (*field* på engelska) på Wikipedia.

Lektion 10

Repetition för tentan.