Algebra och geometri, föreläsning 18-20 för F och Q, HT17

Dan Lilja

4 oktober 2017

Sammanfattning

Föreläsningsanteckningar för föreläsningarna 18, 19, och 20 som jag höll som vikarie i kursen "Algebra och geometri" för programmen F och Q i period 1, höstterminen 2017.

1 Föreläsning 18: Lite mer om geometri i rummet och kombinatorik

1.1 Planets ekvation på parameterform och ett avslutande exempel

Vi har sett att ett plan kan beskrivas på bland annat allmän form, $Ax + By + Cz = D$ där (A, B, C) är normalvektorn till planet och D kan bestämmas genom att ge en punkt (x_0, y_0, z_0) i planet och sätta $D = Ax_0 + By_0 + Cz_0$. Vi ska nu titta på ett annat sätt att beskriva ett plan.

Givet två vektorer $\overrightarrow{u}$ och $\overrightarrow{v}$ i rummet är vi intresserade av att titta på alla vektorer $\overrightarrow{r}$ som kan skrivas som en kombination av $\overrightarrow{u}$ och $\overrightarrow{v}$, d.v.s. $\overrightarrow{r} = t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v}$ för några reella tal t, s. Om de två vektorerna $\overrightarrow{u}$ och $\overrightarrow{v}$ inte är parallella kommer alla dessa kombinationer att bilda ett plan som går genom origo. Planet spänns upp av $\overrightarrow{u}$ och $\overrightarrow{v}$. Om vi istället vill ha ett plan som går genom en punkt P och spänns upp av $\overrightarrow{u}$ och $\overrightarrow{v}$ kan vi istället skriva

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v} \tag{1}$$

där $r_0 = \overrightarrow{0P}$. Denna ekvation kallas för *planets ekvation på parameterform.*

Givet ett plan Π på parameterform $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_0} + t\overrightarrow{u} + s\overrightarrow{v}$ kan vi enkelt gå över till allmän form. Vad vi behöver är normalen $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ till planet. Eftersom vi redan har två vektorer i planet Π, nämligen $\overrightarrow{u}$ och $\overrightarrow{v}$, kan vi få fram normalen med hjälp av kryssprodukten,

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\,.$$

Vi behöver också en punkt P i planet för att få fram D och för detta kan vi använda att $\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{0P}$ så koefficienterna för vektorn $\overrightarrow{r_0}$ ger oss en punkt i planet.

För att gå åt andra hållet, från allmän form till parameterform, låter vi planet Π ges av ekvationen $Ax + By + Cz = D$. Eftersom detta är en linjär ekvation med tre okända,

x, y, z, kan vi lösa den i termer av två obestämda parametrar t, s. Detta ger oss då planets ekvation på parameterform.

Ett tillfälle då parameterformen är behändig är när vi vill bestämma planet Π som innehåller tre olika punkter P_0, P_1, P_2 som inte ligger i linje. Vi kan då välja till exempel $r_0 = \overrightarrow{0P_0}$, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{P_0P_1}$ och $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{P_0P_2}$.

Vi avslutar nu geometriavsnittet med ett lite djupare exempel.

Exempel 1.1. Linjen ℓ_1 ges av ℓ_1: $(x, y, z) = (1, 0, 1) + t(5, -3, 2)$ där $t \in \mathbb{R}$ och linjen ℓ_2 ges som skärningen mellan planen $x + y - z = 1$ och $2x + 4y + z = 4$.

1. Visa att linjerna ℓ_1 och ℓ_2 är parallella.

2. Bestäm ekvationen på allmän form för det plan Π som innehåller både ℓ_1 och ℓ_2.

Lösning. 1. De två linjerna är parallella om deras riktningsvektorer är multipler av varandra. Vi vet att riktningsvektorn $\overrightarrow{v_1}$ för linjen ℓ_1 är $\overrightarrow{v_1} = (5, -3, 2)$. Vi behöver alltså hitta riktningsvektorn $\overrightarrow{v_2}$ för linjen ℓ_2. Låt $\overrightarrow{n_1} = (1, 1, -1)$ och $\overrightarrow{n_2} = (2, 4, 1)$ vara normalerna till de båda planen som definierar linjen ℓ_2. Eftersom linjen ℓ_2 ligger i båda planen måste därför båda normalerna $\overrightarrow{n_1}$ och $\overrightarrow{n_2}$ vara ortogonala mot $\overrightarrow{v_2}$. Vi kan alltså få fram $\overrightarrow{v_2}$ som kryssprodukten av $\overrightarrow{n_1}$ och $\overrightarrow{n_2}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v_2} &= \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} \\ &= \det\begin{pmatrix} \overrightarrow{\imath} & \overrightarrow{\jmath} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= 5\overrightarrow{\imath} - 3\overrightarrow{\jmath} + 2\overrightarrow{k} \\ &= 1 \cdot \overrightarrow{v_1}\,.\end{aligned}$$

Vi ser alltså att riktningsvektorn $\overrightarrow{v_2}$ i vårt fall blir samma som $\overrightarrow{v_2}$ så linjerna är parallella.

2. För att skriva planet Π på allmän form $Ax + By + Cz = D$ behöver vi hitta dess normalvektor $\overrightarrow{n}$. Ett enkelt sätt att göra detta är att först hitta två vektorer $\overrightarrow{u}$ och $\overrightarrow{v}$ i planet eftersom deras kryssprodukt då kommer vara ortogonal mot planet. I vårt fall har vi också redan två vektorer som vi vet ska ligga i planet, nämligen riktningsvektorerna för de båda linjerna. Dock vet vi att linjerna är parallella, och våra valda riktningsvektorer är till och med samma, så vi kommer inte kunna använda dem i kryssprodukten eftersom detta bara skulle ge oss nollvektorn. Vi kan fortfarande använda den ena riktningsvektorn men vi behöver hitta en annan vektor för att kunna använda kryssprodukten. Eftersom vi redan känner till en punkt i ℓ_1, punkten $P_1 = (1, 0, 1)$, behöver vi bara hitta en punkt P_2 i ℓ_2 eftersom vi då kan bilda vektorn $\overrightarrow{P_1P_2}$ som också ligger i planet och som inte är parallell med $\overrightarrow{v_1}$ eftersom linjerna ℓ_1 och ℓ_2 är olika.

Eftersom linjen ℓ_2 ges som skärningen mellan två plan, $x+y-z=1$ och $2x+4y+z=4$, kan vi få en punkt på linjen ℓ_2 genom att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+4y+z=4 \end{cases}$$

Gör vi detta får vi ut linjen ℓ_2:s ekvation på parameterform. Eftersom vi inte behöver hela linjen utan bara en punkt på linjen behöver vi inte hitta alla lösningar till systemet utan bara en enda punkt (x,y,z) som löser det. Om vi tittar lite på systemet kan vi se att punkten $(x,y,z)=(0,1,0)$ löser hela systemet, alltså kan vi välja $P_2=(0,1,0)$. vi får då

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(0,1,0)-(1,0,1)=(-1,1,-1)\,.$$

Vi kan nu beräkna normalen till planet Π:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{n_\Pi} &= \vec{v}\times\overrightarrow{P_1P_2} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 5 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} \\
&= 1\vec{\imath}+3\vec{\jmath}+2\vec{k}\,.
\end{aligned}$$

Slutligen behöver vi också en punkt i planet för att kunna bestämma D, t.ex. punkten $(0,1,0)$. Vi får då att planets ekvation ges av $x+3y+2z=D$ och genom insättning av punkten $(0,1,0)$ får vi att $D=1\cdot 0+3\cdot 1+2\cdot 0=3$.

$\square$

1.2 Kombinatorik

Kombinatorik kan beskrivas som den del av matematiken som håller på med ändliga strukturer. Till exempel kan man vara intresserad av att beräkna på hur många olika sätt vi kan ordna ett antal objekt eller på hur många olika sätt man kan dra fem kort ur en kortlek. Kombinatoriken är också nära kopplad till sannolikhetsteorin. Om vi är intresserade av hur stor sannolikhet det är att få ett par i poker behöver vi beräkna dels hur månmga olika pokerhänder det finns och dels hur många av dessa som innehåller ett par.

Exempel 1.2. Vi är på restaurang och ska beställa en trerättersmåltid. Restaurangen serverar n stycken olika förrätter, m stycken olika varmrätter, och k stycken olika efterrätter. Förutsatt att vi måste välja exakt en förrätt, exakt en varmrätt och exakt en efterrätt men att vi i övrigt får beställa hur vi vill, på hur många sätt kan vi komponera våran trerättersmåltid?

Om vi börjar med att välja förrätt så ser vi att vi kan göra detta på n olika sätt eftersom det finns n stycken olika förrätter. För varje val av förrätt kan vi sedan välja varmrätt på m stycken olika sätt. Sammanlagt kan vi alltså göra $n \cdot m$ olika val av förrätt och varmrätt. För vart och ett av dessa val kan vi sedan välja efterrätt på k olika sätt. Sammanlagt får vi därför $n \cdot m \cdot k$ olika sätt att komponera vår trerättersmåltid. Vi ser alltså att antalet sätt att göra alla tre val fås genom att multiplicera ihop antalet sätt att göra varje val för sig. Detta är ett exempel på en allmän princip som kallas *multiplikationsprincipen*.

Sats 1.3 (Multiplikationsprincipen)**.** *Om operationerna $F_1, F_2, \dots, F_m$ kan göras på respektive $n_1, n_2, \dots, n_m$ olika sätt så kan den sammansatta operationen $F_1 F_2 \dots F_m$ göras på $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_m$ olika sätt.*

Exempel 1.4. I en förening med 15 medlemmar ska väljas en styrelse bestående av ordförande, sekreterare och kassör. Ingen person får inneha fler än en post i styrelsen. På hur många olika sätt kan styrelsen väljas?

Om vi börjar med att välja en ordförande, så som de flesta föreningar brukar göra när det är val, så finns det 15 olika möjligheter. När vi sedan ska välja en sekreterare är en person redan upptagen med att vara ordförande så nu finns endast 14 valmöjligheter kvar. Vid valet av kassör finns sedan bara 13 valmöjligheter. Multiplikationsprincipen säger oss därför att det finns totalt $15 \cdot 14 \cdot 13$ olika sätt att välja styrelsen.

Vi säger att vi har gjort ett *ordnat urval utan återläggning*. Det är ordnat eftersom det styrelsen där person A är ordförande, person B är sekreterare, och person C är kassör räknas som en annan styrelse än den där person B är ordförande, person A är sekreterare, och person C är kassör. Det är utan återläggning eftersom vi bara kan välja en person en gång, när den väl är vald kan den personen inte väljas igen. Detta är ett så pass vanligt scenario inom kombinatoriken att det har fått ett eget namn.

Definition 1.5. Givet en viss mängd med n stycken element kallas en ordnad delmängd av k element för en *k-permutation av n element*. Antalet k-permutationer av n element ges av

$$P(n,k) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Ett viktigt specialfall är då $k = n$ och vi kallar detta helt enkelt för en permutation av n element. Antalet permutationer av n element ges av $P(n,n) = n!$ eftersom $0! = 1$.

Exempel 1.6. Hur många olika "ord" kan man bilda genom att ordna om bokstäverna i "ABCD"?

I detta fall handlar det om att beräkna antalet permutationer av de fyra bokstäverna i "ABCD", vilket kan göras på 4! olika sätt, men hur blir det om vi istället frågar efter antalet ord som kan skapas genom att ordna om bokstäverna i ordet "MATTE"? Skillnaden här är att två av bokstäverna är samma. Vi får fortfarande samma ord om vi byter plats på de två T som finns i ordet. Om vi för tillfället markerar de två bokstäverna T så att de blir olika och tittar på ordet "MAT_1T_2E" istället så är vi i samma situation som tidigare, nämligen att vi kan göra det på 5! olika sätt. Eftersom vi inte bryr oss om i vilken ordning vi väljer ut våra två olika T måste vi nu ta hänsyn till detta. Om vi låter x vara antalet ord som kan bildas av ordet "MATTE" måste vi därför ha att $2x = 5!$ eftersom det finns två olika sätt att ordna bokstäverna T. Vi får alltså att $x = \frac{5!}{2}$.

Ofta när vi gör ett urval spelar det ingen roll i vilken ordning vi gör valen, så som fallet med våra två T i exemplet ovan eller om vi drar kort till en pokerhand. Det enda som spelar roll är vilka objekt som valdes ut, inte i vilken ordning de valdes. Vi pratar då om ett *oordnat urval utan återläggning*. Detta är en så pass vanlig situation att den också har fått ett eget namn.

Definition 1.7. Givet en mängd med n element kallas en oordnad delmängd av k element för en *k-kombination av n element*. Antalet k-kombinationer av n-element ges av

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{P(n,k)}{k!}$$

Uttrycket $\binom{n}{k}$ uttalas som "n över k" eller "n välj k"[1].

Från Formeln

$$\binom{n}{k} = \frac{P(n,k)}{k!}$$

ser vi att antalet k-kombinationer av n element kan tolkas som att vi först beräknar antalet k-permutationer av n element och sedan kompenserar för ordningen genom att dividera med antalet permutationer av de k valda elementen, alltså antalet olika ordningar på de valda elementen. Alternativt, genom att multiplicera båda sidor med $k!$, kan vi tolka antalet k-permutationer av n element som antalet k-kombinationer av n element multiplicerat med antalet permutationer av de k valda elementen. Detta återkopplar till multiplikationsprincipen: vi delar upp det ordnade valet i att först ett oordnat val, vilket kan göras på $\binom{n}{k}$ olika sätt, och väljer sedan en ordning på de k stycken valda elementen, vilket kan göras på $k!$ olika sätt. Multiplikationsprincipen säger oss då att det kan göras på $\binom{n}{k} \cdot k!$ olika sätt.

2 Föreläsning 19: Mer om kombinatorik

Kom ihåg från förra föreläsningen:

Multiplikationsprincipen Om operationen F_i kan göras på n_i olika sätt för $i = 1, 2, \ldots, m$ så kan den sammansatta operationen $F_1 F_2 \ldots F_m$ göras på $n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_m$ olika sätt.

Permutationer Antalet k-permutationer av n stycken element ges av $P(n,k) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Kombinationer Antalet k-kombinationer av n stycken element ges av

$$\binom{n}{k} = \frac{P(n,k)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

[1] På engelska används nästan uteslutande "n choose k".

.

Exempel 2.1. Vi har n stycken kulor varav k_1 är svarta, k_2 är vita, k_3 är röda och k_4 är röda. På hur många olika sätt kan kulorna radas upp?

Vi kan tänka oss att vi ska placera ut kulorna på n stycken platser. Om vi tänker oss att vi först placerar de svarta kulorna kan vi göra detta på $\binom{n}{k_1}$ olika sätt. De vita kulorna kan sedan placeras på $\binom{n-k_1}{k_2}$ olika sätt och sedan kan de röda kulorna placeras på $\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$ olika sätt. Slutligen fylls resterande $n-k_1-k_2-k_3$ platserna av de gröna kulorna. Enligt multiplikationsprincipen får vi då att antalet sätt ges av

$$\begin{aligned}\binom{n}{k_1}\cdot\binom{n-k_1}{k_2}\cdot\binom{n-k_1-k_2}{k_3} &= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\cdot\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}\cdot\frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!(n-k_1-k_2-k_3)!}\\ &= \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!k_4!}\end{aligned}$$

där den andra likheten följer av att $n-k_1-k_2-k_3=k_4$ (endast de gröna kulorna finns kvar).

Exempel 2.2. Efter att ha radat upp våra kulor tappar vi bort dem och behöver köpa nya. Vi vill köpa 10 stycken kulor i färgerna svart, vit, röd och grön. Hur många olika kombinationer av kulor kan vi köpa om vi inte har några krav på antalet kulor av vardera färg?

I det här fallet kan vi tänka oss att vi radar upp våra 10 kulor och skiljer dem åt med en avgränsare. Vi kan representera detta med en följd av nollor och ettor, där nollor representerar en kula och en etta en evgränsare. En möjlig kombination är då till exempel

$$\underbrace{00}_{\text{svarta}}\;1\underbrace{0000}_{\text{vita}}1\;\underbrace{0}_{\text{röda}}\;1\;\underbrace{000}_{\text{gröna}}$$

Vi kan alltså se problemet som att bestämma antalet sätt att placera ut de tre ettorna på varsin plats bland de 13 möjliga platserna (de 10 kulorna plus de 3 avgränsarna). Antalet möjliga kombinationer av kulor är alltså

$$\binom{13}{3}=\frac{13!}{3!10!}=286\,.$$

Observera att detta också innefattar kombinationer där t.ex. alla kulor är röda.

Efter att ha sett de grundläggande koncepten och några exempel ska vi nu titta på några allmänna egenskaper.

Sats 2.3. *1.* $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$,

2. $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$,

3. $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$, *4.* $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.

Bevis. Det är möjligt att bevisa alla dessa egenskaper med hjälp av formeln $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ men det är intressantare och mer lärorikt att bevisa med kombinatoriska resonemang.

1. Det finns bara ett sätt att ur en mängd med n element välja ut n element, nämligen att välja alla element. Det finns också bara ett sätt att välja ut 0 element, nämligen att inte välja något element alls.
2. Att plocka ut k element ur en mängd med n element är samma sak som att välja de $n-k$ element som ska vara kvar.
3. Markera ett av de $n+1$ elementen i mängden. Vi kan nu dela upp alla kombinationer i de som inte innehåller det märkta elementet och de som innehåller det märkta elementet. Eftersom det finns n stycken omärkta element finns det därför $\binom{n}{k}$ olika kombinationer som inte innehåller det märkta elementet och det finns $\binom{n}{k-1}$ olika kombinationer som innehåller det märkta elementet eftersom ett element då redan är taget. Sammanlagt får vi alltså att antalet kombinationer är deras summa, d.v.s.
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$
4. Summan $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ är antalet sätt att ur en mängd med n element välja ut något antal element (eller inga alls). Att göra ett sådant val är samma sak som att för vart och ett av de n elementen välja om vi ska plocka ut det eller inte. Det finns alltså två val och det ska göras en gång för varje element, alltså kan detta göras på 2^n olika sätt enligt multiplikationsprincipen.

□

Enligt egenskap 3 kan vi bygga upp följande triangel:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\ & & & \vdots & & & \end{array}$$

Figur 1: Pascals triangel

Genom att ställa upp det på detta sätt är varje element i triangeln summan av de två närmaste elementen ovanför. Det följer också av egenskap 2 att den är symmetrisk kring mittlinjen. Triangeln är också kopplad till uttryck på formen $(x+y)^n$, vilket brukar kallas *binomialsatsen* och därför kallas ofta talen $\binom{n}{k}$ för *binomialkoefficienter.*

Sats 2.4 (Binomialsatsen)**.** *Om n är ett positivt heltal gäller att*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \, .$$

Bevis. Vi börjar med omskrivningen $(x+y)^n = (x+y)(x+y)\dots(x+y)$. Genom att utföra multiplikationen får vi en samling termer som alla har formen $x^{n-k}y^k$ för k mellan 0 och n. När vi utför multiplikationen får vi för varje parentes välja om vi vill multiplicera med x eller y i den parentesen. För ett givet k finns det därför $\binom{n}{k}$ stycken termer $x^{n-k}y^k$, en för varje val av vid vilka k stycken faktorer vi ska multiplicera med y istället för x. Koefficienten framför $x^{n-k}y^k$-termen är alltså $\binom{n}{k}$. Genom att summera över k får vi nu

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \, .$$

$\square$

Exempel 2.5. Vi bill bestämma konstanttermen i utvecklingen av $\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x^2}\right)^{18}$. Enligt binomialsatsen får vi att

$$\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{x^2}\right)^{18} = \sum_{k=0}^{18} \binom{18}{k} \left(\frac{x}{2}\right)^{18-k} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{18} \binom{18}{k} (-1)^k \frac{1}{2^{18-k}} x^{18-3k}$$

Konstanttermen fås då $18 - 3k = 0 \iff k = 6$, alltså kan vi se att koefficienten blir $\binom{18}{6} \cdot (-1)^6 \cdot \frac{1}{2^{12}} = \binom{18}{6} \cdot \frac{1}{2^{12}}$.

Anmärkning 2.6. *Kombinationer och binomialkoefficienter kan också tolkas i termer av ändliga mängder och deras delmängder. Givet en mängd med n element kan binomialkoefficienten $\binom{n}{k}$ tolkas som antalet delmängder med k element.*

3 Föreläsning 20: Repetition

Följande exempel är en samling tentauppgifter från de olika exempeltentorna på Studentportalen.

Exempel 3.1. Ekvationen $z^4 - 2z^3 + 7z^2 - 4z + 10 = 0$ har en lösning $z = 1 + 2i$. Hitta alla lösningar till ekvationen.

Lösning. Eftersom polynomet är reellt vet vi att komplexa lösningar måste komma i konjugerade par, alltså måste även $z = 1 - 2i$ vara en lösning. Enligt faktorsatsen kan vi därför bryta ut $(z - (1+2i))(z - (1-2i)) = z^2 - 2z + 5$:

$$
\begin{array}{rl}
z^2 + 2 & \\
\cline{1-1}
z^4 - 2z^3 + 7z^2 - 4z + 10 & \multicolumn{1}{|l}{z^2 - 2z + 5} \\
\cline{2-2}
-(z^4 - 2z^3 + 5z^2) & \\
\cline{1-1}
2z^2 - 4z + 10 & \\
-(2z^2 - 4z + 10) & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Vi ser att $z^4 - 2z^2 + 7z^2 - 4z + 10 = (z^2 - 2z + 5)(z^2 + 2)$. Ekvationen $z^2 + 2 = 0$ har lösningarna $z = \pm\sqrt{(2)}i$. Alltså har ekvationen $z^4 - 2z^3 + 7z^2 - 4z + 10 = 0$ lösningarna $z = 1 \pm 2i$ och $z = \pm\sqrt{2}i$. $\square$

Exempel 3.2. Visa med induktion att följande likhet gäller för alla positiva heltal n:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Lösning. Låt $VL_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ och $HL_n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Vi behöver göra tre steg: basfall, induktionsantagande, och induktionssteg.

Basfall: För $n = 1$ har vi följande:

$$
VL_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad HL_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 1 \cdot 0 \\ 0 & 1 & 2 \cdot 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

så vi ser att $VL_1 = HL_1$.

Induktionsantagande: Antag att $VL_p = HL_p$ för något positivt heltal p.

Induktionssteg:

$$\begin{aligned}
VL_{p+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{p+1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{p} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{IA}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 2p & 2p(p-1) \\ 0 & 1 & 2p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2+2p & 4p+2p(p-1) \\ 0 & 1 & 2+2p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2(p+1) & 2p^2+2p \\ 0 & 1 & 2(p+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2(p+1) & 2(p+1)p \\ 0 & 1 & 2(p+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= HL_{p+1}
\end{aligned}$$

Enligt induktionsprincipen gäller därför $VL_n = HL_n$ för alla positiva heltal n. $\square$

Exempel 3.3. Den räta linjen ℓ: $(x, y, z) = (1 + 2t, 3 - t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$ speglas i planet Π: $x + 2y + z = 7$. Bestäm ekvationen på parameterform för spegelbilden av linjen ℓ.

Lösning. Ekvationen på parameterform kan lätt skrivas om vi lyckas spegla två punkter på linjen eftersom vi då kan ta som ortsvektor den vektor som pekar från origo till den ena punkten och som riktningsvektorn den vektor som pekar från den ena vektorn till den andra. Om linjen dessutom skär planet kan skärningspunktens spegling enkelt bestämmas, den är nämligen sin egen spegling, så vi kan då använda skärningspunkten som en av de två punkterna vi behöver. För att kontrollera om linjen skär planet kan vi undersöka om linjens riktningsvektor är ortogonal mot planets normalvektor: om dem är ortogonala så är linjen parallell med planet och kommer aldrig skära planet, annars är linjen inte parallell med planet och kommer skära planet i exakt en punkt.

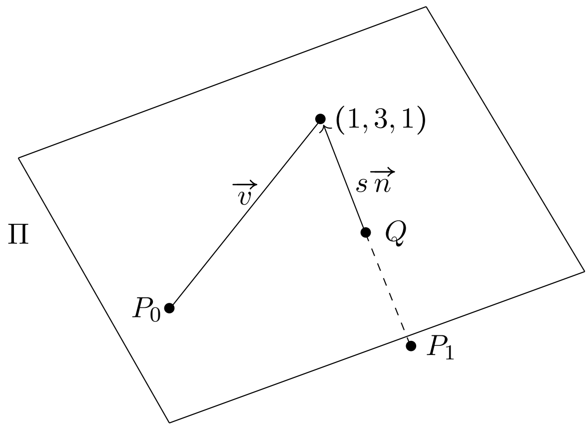
Låt $\overrightarrow{v} = (2, -1, 1)$ vara linjens riktningsvektor och låt $\overrightarrow{n} = (1, 2, 1)$ vara planets normalvektor. VI har då

$$\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 1$$

så linjen kommer alltså skära planet i en punkt. För att bestämma denna punkt stoppar vi in linjens ekvation i planets ekvation:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 + 2t + 6 - 2t + 1 + t \\ &= 8t + 7 \\ &= 7 \\ \Leftrightarrow \quad t &= -1 \end{aligned}$$

Skärningspunkten får alltså då $t = -1$ i linjens ekvation. Kalla skärningspunkten för P_0. Vi kan då se att $P_0 = (1-2, 3+1, 1-1) = (-1, 4, 0)$. Som andra punkt kan vi beräkna speglingen av punkten $(1, 3, 1)$ som vi får då $t = 0$. Kalla speglingen av $(1, 3, 1)$ för P_1. Nu kan det vara bra att rita en skiss över situationen för att få en tydligare bild av vad som behöver göras och hur vi kan göra det. Observera att vektorn $\overrightarrow{v}$ pekar från P_0 till $(1, 3, 1)$ eftersom vi får P_0 genom att utgå från $(1, 3, 1)$ och dra ifrån $1 \cdot \overrightarrow{v}$.



Figur 2: En skiss över problemet.

Från figuren kan vi se att om vi projicerar $\overrightarrow{v}$ på $\overrightarrow{n}$ får vi vektorn $s\overrightarrow{n}$ som pekar från punkten Q i planet till punkten $(1, 3, 1)$, där Q är den punkt i planet som är närmast punkten $(1, 3, 1)$. Vi kan då slutligen få punkten P_1 genom att från punkten $(1, 3, 1)$ subtrahera $2s\overrightarrow{n}$, eftersom vi då går lika långt på andra sidan planet. Enligt projektionsformeln har vi

$$\begin{aligned} proj_{\overrightarrow{n}}(\overrightarrow{v}) &= \frac{\overrightarrow{v} \bullet \overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|^2}\overrightarrow{n} \\ &= \frac{(2, -1, 1) \bullet (1, 2, 1)}{1 + 4 + 1}(1, 2, 1) \\ &= \frac{1}{6}(1, 2, 1) \\ &= s\overrightarrow{n}\ . \end{aligned}$$

Slutligen får vi nu följande:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{P_0P_1} &= \overrightarrow{v} - \frac{2}{6}\overrightarrow{n} \\
&= (2,-1,1) - \frac{1}{3}(1,2,1) \\
&= \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{1}{3}(5,-5,2)\,.
\end{aligned}$$

Vi kan alltså välja vektorn $(5,-5,2)$ som riktningsvektor för den speglade linjen. Om vi utgår från punkten $P_0 = (-1,4,0)$ blir då ekvationen för den speglade linjen

$$(x,y,z) = (-1,4,0) + t(5,-5,2) = (-1+5t, 4-5t, 2t)\,.$$

$\square$

Exempel 3.4. Bestäm alla lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y - 2z = 1 \\ \quad 3y + az = a - 1 \end{cases}$$

Lösning. Totalmatrisen för systemet är följande:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & a & a-1 \end{array}\right)$$

Vi vill lösa systemet genom att först förenkla det m.h.a. radoperationer:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & a & a-1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ -1 \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & a & a-1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1 \\ \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & a-1 \end{array}\right)$$

Från den sista matrisen ser vi att vi kan göra följande falluppdelning:

Fall 1: Om $a - 1 \neq 0 \iff a \neq 1$ kan vi dividera sista raden $(a-1)z = a-1$ och får då $z = 1$. Insättning i första raden ger oss

$$3y + z = 3y + 1 = 0 \iff 3 = -\frac{1}{3}\,.$$

Slutligen får vi från andra raden

$$x - y - 2z = x + \frac{1}{3} - 2 = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{8}{3}.$$

Systemet har alltså lösningen $(x, y, z) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$.

Fall 2: Om $a - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; a = 1$ blir den tredje ekvationen bara $0 = 0$ och vi får ingen information om z. Sätt därför $z = t$. Den första ekvationen ger oss då att $y = -\frac{t}{3}$. Slutligen ger den andra ekvationen $x - y - 2z = x + \frac{t}{3} - 2t = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 1 + \frac{5}{3}t$. Systemet har alltså oändligt många lösningar, $(x, y, z) = \left(1 + \frac{5}{3}t, -\frac{1}{3}t, t\right)$ för $t \in \mathbb{R}$.

□

Exempel 3.5. I en regelbunden 20-hörning kan man dra diagonaler. En diagonal bildas av att man drar en linje mellan två icke närliggande hörn.

(a) Hur många diagonaler finns det?

(b) Hur många (oordnade) par av diagonaler skär varandra i en inre punkt (men inte i ett hörn)?

Lösning. (a) En diagonal bestäms entydigt av två icke närliggande punkter. Givet en punkt finns det 17 stycken icke närliggande punkter. Eftersom det finns 20 punkter är det då lätt att dra den felaktiga slutsatsen att det därför, enligt multiplikationsprincipen, finns $20 \cdot 17$ diagonaler, men då har man räknat varje diagonal två gånger: en gång från punkt A till punkt B och en gång från punkt B till punkt A. Det rätta antalet diagonaler är därför $\frac{20 \cdot 17}{2}$.

(b) Först behöver vi observera att i varje fyrhörning alltid finns exakt ett par diagonaler som skär varandra i en inre punkt, så som uppgiften efterfrågar. På motsvarande sätt, om vi har ett par av diagonaler som skär varandra i en inre punkt kan vi skapa en fyrhörning genom att koppla ihop diagonalernas ändpunkter. Antalet diagonaler som skär varandra i en inre punkt är alltså samma som antalet fyrhörningar som kan bildas av 20-hörningens hörn. För att bilda en fyrhörning måste vi välja 4 av 20-hörningens hörn och dessa kan väljas utan inskränkning. Antalet blir därför $\binom{20}{4}$.

□

Exempel 3.6. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Visa att A är inverterbar.

(b) Bestäm inversen till A.

(c) Bestäm matrisen X som uppfyller att $AXB^{-1} = C$.

Lösning. (a) Vi kan avgöra om A är inverterbar genom att beräkna dess determinant:

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix}3 & 3\\ 2 & 3\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}\\ &= 3 - 6 + 4\\ &= 1\end{aligned}$$

Eftersom determinanten inte är 0 är matrisen A inverterbar.

(b) Vi använder oss av radoperationer:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 1\end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -6 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 1\end{array}\right)$$

Vi ser nu att

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -6 & 3 & -1\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

(c) Vi kan se att $AXB^{-1} = C \;\Rightarrow\; X = A^{-1}AXB^{-1}B = A^{-1}CB$ så vi behöver beräkna matrisen $A^{-1}CB$:

$$\begin{aligned}A^{-1}CB &= \begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -6 & 3 & -1\\ 4 & -2 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & -4 & 1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\square$

Exempel 3.7. Bestäm koefficienten för $\frac{1}{x}$ i utvecklingen av $\left(3x - \frac{4}{x^2}\right)^{11}$.

Lösning. Notera först att $\frac{1}{x} = x^{-1}$. Enligt binomialsatsen gäller att

$$\begin{aligned}\left(3x - \frac{4}{x^2}\right)^{11} &= \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} (3x)^{11-k} \left(-\frac{4}{x^2}\right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{11} \binom{11}{k} 3^{11-k} (-1)^k 4^k x^{11-3k} .\end{aligned}$$

För att få termen x^{-1} måste $11 - 3k = -1 \iff 3k = 12 \iff k = 4$. För $k = 4$ får vi då

$$\binom{11}{4} 3^7 (-1)^4 4^4 = \binom{11}{4} 3^7 4^4 .$$

□